

Exercice 1. En utilisant la définition, montrer que :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0.$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-2} = 1.$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0.$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5-1}{2n^5+n^3+n} = \frac{1}{2}.$

Exercice 2. Déterminer la nature des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_{2n} = -\frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ u_{2n+1} = \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$

3. $\begin{cases} u_{2n} = 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ u_{2n+1} = \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$

2. $U_n = \cos n\pi.$

Exercice 3.

1. Soit $u_n = \frac{n^2+n}{n^2+\sqrt{n}}, n \geq 1$. Montrer que si (u_n) est convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{2} \leq l \leq 2$. (On ne cherchera pas l .)

2. Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$. Montrer que si (u_n) est convergente, alors sa limite l vérifie $0 \leq l \leq 1$ (on ne cherchera pas la limite).

3. Question bonus (non obligatoire). Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 4.

1. Soit (u_n) une suite numérique. Donner et commenter la définition de la définition de :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

2. En utilisant la définition, montrer que :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty.$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + n) = -\infty.$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n^2+1}) = -\infty.$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n - 1) = +\infty.$

Exercice 5. Déterminer la nature des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$

2. $u_n = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}.$

Exercice 6. On considère les suites $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!}$

et $v_n = u_n + \frac{1}{(2n)!}.$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune n'est pas un rationnel.

Exercice 7. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par :

$$u_{n+1} = 3 - \frac{(u_n - 3)^2}{3}, u_0 = \frac{3}{2}, w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 - w_n + 3}, w_0 = \frac{7}{2}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est à termes positifs, strictement croissante et majorée par 3.
2. Montrer que (w_n) est strictement décroissante et minorée par 3.
3. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que : $3 - u_{n+1} < \alpha(3 - u_n)$ et $w_{n+1} - 3 < \beta(w_n - 3)$
4. Dédire des questions précédentes que les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.
5. Déterminer un rang p à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont supérieures à $3 - 3^{-2001}$.
6. Déterminer un rang q à partir duquel tous les termes de la suite $(w_n)_n$ sont supérieures à $3 + 3^{-2001}$.
7. En posant $x_n = 3 - u_n$, déterminer une relation entre x_{n+1} et x_n puis déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 8. On donne les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = \frac{5}{2}, v_0 = \frac{11}{2},$

$u_{n+1} = 5 - \frac{(u_n - 5)^2}{5}; v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 - v_n + 5}.$ A l'aide des variations des fonctions $f(x) = 5 - \frac{(x - 5)^2}{5}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 5}$ montrer que :

1. (u_n) est à termes positifs, majorée par 5 et croissante,
2. $(v_n)_n$ est minorée par 5 et décroissante,
3. Ces deux suites sont-elles adjacentes?

Exercice 9. Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant :

$$\exists k \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|.$$

1. Montrer que : $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \frac{k^\alpha}{1 - k} |u_1 - u_0|$ (α à déterminer)
2. Dédire que (u_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite et l un réel vérifiant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$ On suppose que $l \in [0, 1[.$

1. Montrer que : $\exists k \in]0, 1[, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_0 \Rightarrow |u_{n+1}| < k|u_n|$
2. Déduire la limite de $(|u_n|)$ puis celle de (u_n) .

Exercice 11. (Une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ non convergente)

1. Soient $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Indication : On pourra écrire pour $m > n$, $r_m - r_n = \sum_{k=n}^{m-1} (r_{k+1} - r_k)$.

2. Soient $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$, $n \geq 0$.

- a. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{3}{2} \leq r_n \leq 2$.
- b. En déduire que la suite (r_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Que peut-on conclure ?

Exercice 12.

Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_n, (v_n)_n$ définies par $u_0 = a, v_0 = b$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} & \text{moyenne harmonique} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & \text{moyenne arithmétique} \end{cases}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjascentes, de limit $\sqrt{ab}$.

1. Montrer, par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_n - v_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $(v_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
4. Vérifier par récurrence que

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n},$$

et en déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjascentes.

5. Montrer qu'elles convergent vers $\sqrt{ab}$.
6. Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$    10^{-4} près.

Exercice 13. (Suites arithmético-géométriques)

On se propose d'étudier les suites récurrentes de la forme

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n + r, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. Si $r = 0$, et $q \neq 0$ quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. Si $q = 1$, quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. On suppose dans la suite que $q \neq 1$ et $r \neq 0$.
 - a. On pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que l'on peut choisir α de sorte que la suite (v_n) soit géométrique. Quelle est sa raison? son premier terme?
 - b. Dédurre l'expression de u_n en fonction de n .
4. Application : dans chacun des cas ci-dessous déterminer une formule explicite pour (u_n) puis étudier sa convergence.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4, \quad n \geq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 4, \quad n \geq 0 \end{cases} .$$

Exercice 14.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique réelle définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 15.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.